Part I Harmonic Maps and Twistor Spaces Part II Stability of Harmonic Maps(Topology and Geometry of Harmonic Maps)

数理解析研究所講究録
626巻 1987年 49-95

Part I Harmonic Maps and Twistor Spaces
Part II Stability of Harmonic Maps

東京都立大学 理学部 大仁田義裕
(Yoshihiro Ohnita)

本稿では、Part I において twistor space の一般論およびその調和写像の分類の問題への応用に関する最近の Eells, Wood, Burstall, Rawnsley, Salamon らのいくつかの仕事の紹介をする。 Part II では、調和写像の安定性について述べる。主に、最近の Micallef-Moore による定理「単連結コンパクトリーマン多様体で正の曲率作用素を持つものは、球面に位相同型である」の紹介をする。

0. 定義と記号.

(M, g) をリーマン多様体とする。g から接束 TM のテンソル代数へ誘導される内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表わす。TM の複素化 $TM^{\mathbb{C}}$ への $\langle\ ,\ \rangle$ の複素双一次形式としての拡張を $(\ ,\ )$、Hermite内積としての拡張を $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle = (\ ,\ \overline{\ \ })$ によって表わす。

N を多様体とし、写像 $\varphi : N \longrightarrow M$ による TM の引き

戻し $\varphi^{-1}TM$ の誘導接続を ∇ で表わす。

Σ によってリーマン面を表わす。その局所複素座標を (z) とする。写像 $\varphi : \Sigma \longrightarrow M$ に対して、記号

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} = d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

を使う。次の定理により、われわれは、Σ 上の $\varphi^{-1}TM$ の複素化ベクトル束 $E = \varphi^{-1}TM^{\mathbb{C}}$ に holomorphic structure を導入して考える。

<u>定理</u>. (Koszul-Malgrange [Kos-M], [At-H-S])

E : リーマン面 Σ 上の複素ベクトル束.

D : E における線型接続.

$\Longrightarrow$ 次の条件を満たす E の holomorphic structure が唯1つ存在する: E の local section V に対して、

V は E の holomorphic section $\Longleftrightarrow$ $D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} V = 0$.

(N, h) をコンパクトリーマン多様体とする。写像 $\varphi : N \longrightarrow M$ に対するエネルギー汎関数 E は、

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_N |d\varphi|^2.$$

によって定義される。E の臨界点は、"調和写像" と呼ばれる。

$N = \Sigma$ リーマン面のとき、φ 調和 $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}}$ は E の holomorphic section

が成り立つ。

調和写像 φ は、常にエネルギー E の第2変分が非負のとき、

"安定 (stable)" であるという。

調和写像 $\varphi: N \longrightarrow M$ の変分 $\varphi_t: N \longrightarrow M$ ($\varphi_0 = \varphi$)

に対して、エネルギーに対する第2変分公式は、

$$\frac{d^2}{dt^2} E(\varphi_t)\Big|_{t=0} = \int_N \langle \mathcal{J}_\varphi(V), V \rangle \quad , \quad V = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}\Big|_{t=0} \in C^\infty(E)$$

を与える。ここで、

$$\mathcal{J}_\varphi : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E) \quad , \quad \mathcal{J}_\varphi(V) = -\sum_i \nabla^2_{e_i, e_i} V - \sum_i R^M(V, d\varphi(e_i))\, d\varphi(e_i)$$

$\{e_i\}$ は (N, h) における正規直交基、R^M は M の曲率テンソルである。

$\mathcal{J}_\varphi$ は固有値 $\mu_1 < \mu_2 < \cdots \longrightarrow \infty$ を持つ。$\mathcal{J}_\varphi$ の固有値 μ の重複度を $m(\mu)$ によって表わす。$i(\varphi) = \sum_{\mu<0} m(\mu)$ は φ の "index"、$n(\varphi) = m(0)$ は φ の "nullity" と呼ばれる。

Part I. Harmonic Maps and Twistor Spaces.

1. f-twistor spaces.

twistor space の一般論は、Bryant [Br-4]、Salamon [Sal-4]、Rawnsley [Raw] らによって展開されているが、ここでは、最も一般的と思われる Rawnsley による "f-twistor space" の概念を紹介する。

(V, g_0) を内積 g_0 を持つ n 次元実ベクトル空間とする。

$0 < 2k \leq n$ なる整数 k に対して、

$$F_k(V, g_0) = \left\{ F \in \mathrm{End}(V) \, ; \, {}^tF = -F, \ F^3 + F = 0, \ \mathrm{rank}\, F = 2k \right\}$$

とおく。$n = 2k$ のとき、F は通常の V の複素構造である。

$F \in F_k(V, g_0)$ を階数 $2k$ の "f-structure" と呼ぶ。f-structure の幾何学的研究は、Yano [Yan] によって最初になされたようである。 $F \in F_k(V, g_0)$ に対して、F を V の複素化 $V^{\mathbb{C}}$ の複素自己準同型に拡張したとき、$V^{\mathbb{C}}$ の F による固有空間分解

$$V^{\mathbb{C}} = V^{+,F} \oplus V^{0,F} \oplus V^{-,F}$$

を持つ。ここで、

$$V^{+,F} = \{ v \in V^{\mathbb{C}} ;\ F(v) = \sqrt{-1}\, v \},$$
$$V^{0,F} = \{ v \in V^{\mathbb{C}} ;\ F(v) = 0 \},$$
$$V^{-,F} = \{ v \in V^{\mathbb{C}} ;\ F(v) = -\sqrt{-1}\, v \}. \quad \text{とおく.}$$

このとき、$\overline{V^{+,F}} = V^{-,F}$ である。

V の内積 g_0 の $V^{\mathbb{C}}$ への複素双一次形式への拡張を $(\ ,\ )$ によって表わす。$w \in V^{\mathbb{C}}$ は、$(w, w) = 0$ なるとき "isotropic"、$V^{\mathbb{C}}$ の複素部分空間 W は、$(w, w) = 0$ $(\forall w \in W)$ を満たすとき、"isotropic" であると呼ぶ。 上において、$V^{+,F}$ は $V^{\mathbb{C}}$ の isotropic k-plane である。逆に、$V^{\mathbb{C}}$ の isotropic k-plane W を与えると、$W = V^{+,F}$ となるような階数 $2k$ の V の f-structure が唯一存在する。

$F_k(V, g_0)$ の等質空間としての表現を与える。$O(V)$ を V の直交群とする。$\mathfrak{o}(V) = \{ F \in End(V) ;\ {}^tF = -F \}$ は $O(V)$ の Lie 環である。 $F \in F_k(V, g_0) \subset \mathfrak{o}(V)$ とするとき、$F_k(V, g_0) = ad(O(V)) \cdot F \subset \mathfrak{o}(V)$ が成り立ち、$F_k(V, g_0)$ はコンパクト等質空間 $O(n)/U(k) \times O(n-2k)$ と微分同相である。$F_k(V, g_0)$ は 1つの generalized flag manifold である。

一般に、コンパクト連結 Lie 群 G のその Lie 環 における共役類 $\mathcal{C} = (\mathrm{ad}\, G)\xi$ $(\xi \in \mathcal{C})$ は、"generalized flag manifold" と呼ばれる。generalized flag manifold $\mathcal{C}$ には、標準的な仕方で複素構造を定めることができる。$\xi \in \mathcal{C}$ を 1 つ選ぶ。$\mathfrak{m} = \mathrm{Im}\, \mathrm{ad}\xi \subset \mathfrak{g}$ とおくと、$T_\xi \mathcal{C}$ は $\mathfrak{m}$ と同一視できる。$\mathrm{ad}\xi$ は $\mathfrak{g}$ の skew-symmetric endomorphism だから、$\mathrm{ad}\xi$ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の固有空間分解

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \sum_{\lambda} \mathfrak{g}^{\lambda,\xi}$$ を得る。

ここで、$\mathfrak{g}^{\lambda,\xi} = \{ X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \,;\, (\mathrm{ad}\xi) X = \sqrt{-1}\lambda \cdot X \}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$。

このとき、$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}^{\lambda,\xi}$. われわれは、$\mathfrak{m}^{+} = \sum_{\lambda > 0} \mathfrak{g}^{\lambda,\xi}$、$\mathfrak{m}^{-} = \sum_{\lambda < 0} \mathfrak{g}^{\lambda,\xi}$ を それぞれ (1.0)-接空間、(0.1)-接空間 とするような $\mathcal{C}$ 上の不変複素構造を定めることができる。特に、$F_k(M.g_0)$ に対しても、この仕方で不変複素構造が定められる。

さて、次に n 次元リーマン多様体 $(M.g)$ 上の f-twistor space を定義しよう。$(M.g)$ の直交枠束を $O(M.g)$ とする。$0 < 2k \leq n$ なる整数 k に対して、各ファイバーが $F_k(T_x M.g)$ $(x \in N)$ であるファイバー束を $F_k(M.g)$ とする。$F_k(M.g)$ は、$O(M.g)$ の構造群 $O(V)$ の $F_k(V.g_0)$ への作用に関して $O(M.g)$ に同伴したファイバー束 $O(M.g) \times_{O(V)} F_k(V.g_0)$ に他ならない。$F_k(M.g)$ を N 上の階数 $2k$ の "f-twistor space" と呼ぶ。$n = 2k$ のとき、$\mathcal{J}(M.g) = F_k(M.g)$ とおき、単に $(M.g)$ の "twistor space" と呼ぶ。

$Z = F_k(M.g)$ とおき、Z から M への射影を π で表わす。

$\mathcal{Z}$ 上に 2つの f-structure F_1, F_2 を定めよう。$F_k(M,g)$ のファイバーに接する vertical distribution を $\mathcal{V}$ によって表わす。$F_k(M,g)$ の各ファイバーは、$F_k(V, g_0)$ から誘導された複素構造を持つ。$\mathcal{V}$ におけるその複素構造を J^V によって表わす。また、$F_k(M,g)$ は、$O(M,g)$ に同伴されているから、(M,g) の Levi-Civita 接続は、$\mathcal{Z}$ 上の horizontal distribution $\mathcal{H}$ を誘導する。各 $F \in \mathcal{Z}$ において、線型同型 $d\pi : \mathcal{H}_F \longrightarrow T_{\pi(F)}M$ を通して、F から $\mathcal{H}_F$ の f-structure F^H が誘導される。$F_1 = (J^V, F^H)$, $F_2 = (-J^V, F^H)$ によって、$\mathcal{Z}$ 上の 2つの f-structure が定められる。$n = 2k$ のときは、それぞれを J_1, J_2 によって表わす。F_1 と F_2 は、まったく異なる性質を持つ。例えば、J_1, J_2 の積分可能性については、Salamon [Sal-4] によれば、M が向き付けられているとき、

$$J_1 \text{ が積分可能} \iff \begin{cases} n \geq 6 \text{ のとき、} M \text{ conformally flat.} \\ n = 4 \text{ のとき、} M \text{ anti-self-dual.} \end{cases}$$

J_2 は決して積分可能でない。

F_1, F_2 に対しても、同様な結果を Rawnsley [Raw] は、示している。

次の節で述べるように、F_1 より F_2 の方が M への調和写像と強い関係にあるようである。この非積分可能な概複素構造 J_2 は、Eells - Salamon [E-S-1.2] によって着目された。

2. $F_k(M, g)$ への holomorphic maps.

(N, J) を概複素多様体とする．$\psi : N \longrightarrow F_k(M, g)$ を写像とする。

<u>定義</u> 2.1.

(1) ψ "F_1-holomorphic" $\Longleftrightarrow$ $d\psi \circ J = F_1 \circ d\psi$

($n = 2k$ のとき，"J_1-holomorphic")

(2) ψ "F_2-holomorphic" $\Longleftrightarrow$ $d\psi \circ J = F_2 \circ d\psi$

($n = 2k$ のとき，"J_2-holomorphic")

<u>注意</u>. ψ について，3条件

① F_1-holomorphic.
② F_2-holomorphic.
③ horizontal.

のうち，2つを仮定すれば残りの1つが出る。horizontal である時には，単に holomorphic ということにする。

$\varphi = \pi \circ \psi : N \longrightarrow M$ とおく．$\varphi^{-1}TM$ の各ファイバーは，$(F^{\psi})_p = \psi(p)$ $(p \in N)$ によって定義された f-structure F^{ψ} を持つ．F^{ψ} は，$E = \varphi^{-1}TM^{\mathbb{C}}$ の固有部分束分解 $E = \psi^{+} + \psi^{0} + \psi^{-}$ を誘導する．それぞれ $\psi^{\pm}, \psi^{0}$ は，F^{ψ} の $\pm\sqrt{-1}$, 0- 固有空間に対応する．また，J に関する $TN^{\mathbb{C}}$ の固有分解を $TN^{\mathbb{C}} = T^{(1,0)}N \oplus T^{(0,1)}N$ とする．

ψ についての上の ①, ② ③ の性質は，TN, ψ^{+} の言葉で次のように表現される。

<u>命題</u> 2.2. (cf. [Raw]).

(1) ψ horizontal $\iff$ $\nabla C^\infty(\psi^+) \subset C^\infty(\psi^+)$.

(2) ψ F_1-holomorphic $\iff$ (a) $d\varphi(T^{(1,0)}N) \subset \psi^+$.

(b) $\nabla_X C^\infty(\psi^+) \subset C^\infty(\psi^+)$ $(\forall X \in T^{(1,0)}N)$.

(3) ψ F_2-holomorphic $\iff$ (a) $d\varphi(T^{(1,0)}N) \subset \psi^+$.

(b) $\nabla_X C^\infty(\psi^+) \subset C^\infty(\psi^+)$ $(\forall X \in T^{(0,1)}N)$.

$N=\Sigma$ リーマン面 のとき、E の Koszul-Malgrange holomorphic structure について、命題2.2 (3) は、

ψ F_2-holomorphic $\iff$ (a) $d\varphi(T^{(1,0)}\Sigma) \subset \psi^+$.

(b) ψ^+ は、E の holomorphic subbundle.

と言い換えることができる。

次は、f-twistor space への F_2-holomorphic map と base リーマン多様体への調和写像を結ぶ重要な事実である。

<u>定理</u> 2.3.

(N, h, J) : coclosed Kaehler form を持つ概エルミート多様体.

$\psi : N \longrightarrow F_k(M, g)$ F_2-holomorphic map

$\Rightarrow$ $\varphi = \pi \circ \psi : N \longrightarrow M$ harmonic map

さらに、$N=\Sigma$ のとき、φ は conformal (i.e. $(\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}) = 0$) である。

<u>証明</u>. τ_φ を φ の tension field とする。$\{z_i\}$ を N の局所ユニタリ枠の場とする。$\tau_\varphi = \sum_i (\nabla d\varphi)(z_i, \bar{z}_i) = \sum_i \{ \nabla_{\bar{z}_i}(d\varphi(z_i)) - d\varphi(\nabla_{\bar{z}_i} z_i) \}$.

(N, h, J) は coclosed Kaehler form を持つから、$\sum_i \nabla_{\bar{z}_i} z_i \in T^{(1,0)}N$. 命題2.2 (3)

より、$\tau_\varphi \in C^\infty(\psi^+)$. τ_φ は real だから、$\tau_\varphi = \bar{\tau}_\varphi \in C^\infty(\psi^-)$.
従って、$\tau_\varphi = 0$. さらに、$N = \Sigma$ ならば、命題2.2.(3) より、
$\frac{\partial\varphi}{\partial z} \subset \psi^+$. ψ^+ は isotropic だから、$(\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}) = 0$. //

リーマン面 Σ から M への conformal, harmonic map は、Σ から $F_1(M.g)$ への F_2-holomorphic map と一対一に対応する。対応は、
$\psi^+ = \{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}$ によって与えられる。

$k \geq 2$ の場合. M への conformal harmonic map の $F_k(M.\ )$ への F_2-holomorphic lifting は、一般にはたくさん存在する。

定理.2.4.([Sal-4],[Raw])

(1) $\varphi : \Sigma \longrightarrow M$ conformal, harmonic map
$\Longrightarrow$ $0 < 2k \leq n$ なる任意の整数 k に対して、φ の $F_k(M.g)$ への local F_2-holomorphic lift ψ が存在する。

(2) (1) において Σ がリーマン球面のとき、φ の global F_2-holomorphic lift ψ が取れる。

3. Generalized f-twistor space の例とその応用.

前節で見られるように、$F_k(M.g)$ は一般に大き過ぎる空間であり、応用上は $F_k(M.g)$ より小さな部分空間を M の twistor space として採用する方が有効と思われる。

① M に対して、$F_k(M.g)$ の中に適当な部分空間 Z を見つけて、リーマン球面 S^2 から M への任意の調和写像が標準的な

方法で Z への J_2-holomorphic lift を持つようにできないか？

② M の幾何学的構造から $F_k(M,g)$ 内のおもしろそうな部分空間 Z を見つけて、リーマン面 Σ から Z への J_2-holomorphic map を M へ射影することにより得られる Σ から M への調和写像のクラスの性質、特徴づけの研究をすること。

というようなことが、おもしろい研究の方向と思う。このときの Z にあたる概念を定義しよう。

<u>定義</u> 3.1.

M 上のファイバー束 Z が次の条件を満たすとき、一般に Z は M 上の "metric f-twistor space" と呼ぶ（cf. [Raw]）：

(1) fibre-preserving map

$\mu : Z \longrightarrow F_k(M,g)$

が存在して、$\pi\circ\mu = \pi_Z$ が成立する。

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\mu} & F_k(M,g) \\ {\scriptstyle \pi_Z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & = & M \end{array}$$

(2) Z の各ファイバー $\pi_Z^{-1}(x)$ $(x\in M)$

が complex manifold structure を持ち、

それらは、$x\in M$ に smooth に依存する。

(3) 各 $x\in M$ に対して、$\mu : \pi_Z^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(x)$ は、holomorphic.

(4) Z は horizontal distribution を持つ。

(5) μ は、Z 上の horizontal distribution を $F_k(M,g)$ 上の Levi-Civita connection の horizontal distribution へ写す。

Z を M 上の metric f-twistor space とする。$F_k(M, g)$ に対するのと同様に、Z 上には２つの f-structure $F_1 = (J^V, F^H)$、$F_2 = (-J^V, F^H)$ が定義される。次は、明らか。

命題 3.2.

N : coclosed Kaehler form を持つ概エルミート多様体.

$\psi : N \longrightarrow Z$ F_2-holomorphic map

$\Rightarrow$ $\varphi = \pi_Z \circ \psi$ harmonic map.

$N = \Sigma$ ならば、φ conformal.

注) もちろん、ケーラー多様体は coclosed Kaehler form を持つ。

次に、metric f-twistor space の例を与える。

例 3.3.

P をリーマン多様体 (M, g) 上のコンパクト連結 Lie 群 G を構造群に持つ主束とする。π_P をその射影とする。M の接束 TM が、G のある直交表現 V によって P に同伴されたベクトル束 $P \times_G V$ として表わされ、さらに、TM の Levi-Civita 接続は、P におけるある接続によって誘導されていると仮定する。

今、$\mathfrak{g}$ における G の共役類 C を１つ固定する。G の C への作用によって P に同伴されたファイバー束を $Z = P \times_G C$ とする。Z に、M の metric f-twistor space の構造を定めることができる。$\xi \in C \ (\subset \mathfrak{g})$ を１つ選ぶ。実数 λ に対して、

$V^{\lambda, \xi} = \{ v \in V^{\mathbb{C}} ; \xi(v) = \sqrt{-1} \lambda v \}$ とおく。

//

$V^{+,\zeta}=\sum_{\lambda>0}V^{\lambda,\zeta}$,　$V^{-,\zeta}=\sum_{\lambda<0}V^{\lambda,\zeta}$ とおくとき、分解 $V^{\mathbb{C}}=V^{+,\zeta}+V^{0,\zeta}+V^{-,\zeta}$ を得る。明らかに、$V^{+,\zeta}=\overline{V^{-,\zeta}}$ かつ $V^{+,\zeta}$ は $V^{\mathbb{C}}$ の isotropic subspace で、$V^{+,\zeta}$ の次元は $\zeta\in C$ の取り方に依らない。この次元を k とする。われわれは、$\zeta\in C$ に対して、$\mu_0(\zeta)\in F_k(V,g_0)$ を

$$\mu_0(\zeta)=\begin{cases}\sqrt{-1} & \text{on } V^{+,\zeta}\\ 0 & \text{on } V^{0,\zeta}\\ -\sqrt{-1} & \text{on } V^{-,\zeta}\end{cases}$$

によって定める。このとき、μ_0 は C から $F_k(V,g_0)$ への G 同変な holomorphic map になる。μ_0 より誘導される $\mu: Z\longrightarrow F_k(M,g)$ により、Z に M の metric f-twistor space の構造が定まる。

例 3.2.

M をケーラー多様体、$m=\dim_{\mathbb{C}}M$ とする。$0\leq k\leq m$ なる整数 k に対して、$T^{(1,0)}M$ の複素 k-plane の Grassmann bundle を $G_k(T^{(1,0)}M)$ によって表わす。$G_k(T^{(1,0)}M)$ を $J(M,g)$ へ次のように埋め込むことによって、$G_k(T^{(1,0)}M)$ に metric twistor space の構造を入れることができる。

$$j: G_k(T^{(1,0)}M)\longrightarrow J(M,g)$$

$$j(W)=\begin{cases}\sqrt{-1} & \text{on } W,\\ -\sqrt{-1} & \text{on } W^{\perp}.\end{cases}$$

ここで、$W \in G_k(T^{(1,0)}M)$、$T_x^{(1,0)}M = W \oplus W^{\perp}$.

Calabi および Eells-Wood の定理は、次のように述べることができる。

(Calabi [Ca1])

偶数次元の球面 S^{2m} に対して、S^{2m} の向き付けを保つ元 J の全体を $J^+(S^{2m})$ とする。$S^{2m} = SO(2m+1)/SO(2m)$ と表わすとき、$J(S^{2m})$ や $J^+(S^{2m})$ もまた等質空間になり、$J(S^{2m}) = O(2m+1)/U(m)$、$J^+(S^{2m}) = SO(2m+1)/U(m)$ と表わされる。

リーマン面 Σ から S^{2m} への写像 φ は、

$$\left(\frac{\partial^p \varphi}{\partial z^p}, \frac{\partial^q \varphi}{\partial z^q}\right) dz^{p+q} \equiv 0 \quad (p, q \in \mathbb{Z},\ p+q \geqq 2,\ p, q \geq 1)$$

を満たすとき、"real isotropic" または "superminimal" と呼ばれる。

このとき、

(1) Σ から $J^+(S^{2m})$ への full, horizontal, holomorphic map ψ の射影 $\pi \circ \psi$ は、full, real isotropic, harmonic map である。

(2) Σ から S^{2m} への full, real isotropic, harmonic map は、(1) の方法で得られる。

(3) リーマン球面 S^2 から S^{2m} への harmonic map は、real isotropic である。

(Eells-Wood [E-W-4])

複素射影空間 $P_m(\mathbb{C})$ に対して、例 3.2 で定義された metric twistor space $G_k(T^{(1,0)}P_m(\mathbb{C})) \subset J(P_m(\mathbb{C}))$ $(0 \leq k \leq m)$ を考える。$P_m(\mathbb{C}) = U(m+1)/U(m)\times U(1)$ とするとき、$G_k(T^{(1,0)}P_m(\mathbb{C}))$ も等質空間で、$G_k(T^{(1,0)}P_m(\mathbb{C})) = U(m+1)/U(k)\times U(m-k)\times U(1)$ と表わせる。Σ から $P_m(\mathbb{C})$ への写像 φ は、次を満たす時、"complex isotropic" と呼ばれる：

$$\left\langle\!\left\langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}})^k d^{(1,0)}\varphi\left(\tfrac{\partial}{\partial z}\right), (\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}})^l d^{(1,0)}\varphi\left(\tfrac{\partial}{\partial z}\right) \right\rangle\!\right\rangle = 0 \quad (k, l \in \mathbb{Z},\ k, l \geq 0)$$

ここで、$d^{(1,0)}\varphi$ は $d\varphi$ の $(1,0)$-成分を表わす。このとき、

(1) Σ から $G_k(T^{(1,0)}P_m(\mathbb{C}))$ への full, horizontal, holomorphic map ψ の射影 $\pi\circ\psi$ は、full, complex isotropic, harmonic map である。

(2) Σ から $P_m(\mathbb{C})$ への full, complex isotropic, harmonic map は、ある $G_k(T^{(1,0)}P_m(\mathbb{C}))$ から (1) の方法で得られる。k は、
$k = \underset{p\in\Sigma}{\mathrm{Max}}\ \dim \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{ (\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}})^l d^{(1,0)}\varphi\left(\tfrac{\partial}{\partial z}\right)_p ;\ l \in \mathbb{Z} \right\}$ によって決められる。

(3) S^2 から $P_n(\mathbb{C})$ への harmonic map は、complex isotropic である。

4. Burstall lifting

Calabi, Eells-Wood らの美しい結果を、球面や複素射影空間から "very nice" な多様体（例えば、他の射影空間 $P_m(\mathbb{H})$, $P_2(\mathbb{C}ay)$, ケーラー多様体、リー群、対称空間、四元数ケーラー多様体など）へ拡張することは、大変おもしろいし、重要と思われる。これは、数理物理学者たちにとって興味あることのようである。しかし、Calabi や Eells-Wood のような定理を、S^n や $P_m(\mathbb{C})$ に対し

て作ることは、相当に困難なようである。そこで、3節の①.②で述べたように、適当な良いリーマン多様体 M を与えたとき、M 上に充分制限された metric twistor space Z を見つけて、Z 内の J_2-holomorphic curve を M へ射影して得られる harmonic map の特徴づけ、逆に M への harmonic map を Z へ J_2-holomorphic に lift する標準的な仕方を作るということが考えられよう。

Burstall [Bus-2] は、複素グラスマン多様体 $G_r(\mathbb{C}^n)$ に対して、このことに成功した。ここでは、彼の仕事を紹介する。

$M = G_r(\mathbb{C}^n)$ $(1 \leq r \leq n-1)$ に対して、われわれは、まず、例3.3 に習って M 上の metric twistor space を与える。

$$M = G_r(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(r) \times U(n-r).$$

$$P = U(n).$$

$$G = U(r) \times U(n-r).$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(r) + \mathfrak{u}(n-r).$$

とおく。$1 \leq k \leq n$ なる整数 k と $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ なる k 個の自然数の組 $(n_1, \cdots, n_k)$ に対して、$\xi = \xi(k : n_1, \cdots, n_k) \in \mathfrak{g}$ を次のように取る:

$$\xi = \sqrt{-1}\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} c_2 I_{n_2} & & & \\ & c_4 I_{n_4} & & \\ & & \ddots\ c_{2i} I_{n_{2i}} & \\ & & & \ddots \end{matrix} & O \\ \hline O & \begin{matrix} c_1 I_{n_1} & & & \\ & c_3 I_{n_3} & & \\ & & \ddots\ c_{2i+1} I_{n_{2i+1}} & \\ & & & \ddots \end{matrix} \end{array}\right)$$

ここで、$r = \sum_{i=1}^{[\frac{k}{2}]} n_{2i}$、$n-r = \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} n_{2i+1}$.

$c_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,\cdots,n)$ で、$c_i \neq c_j$ $(i \neq j)$、$c_{2i} > c_{2j-1}$ $(j>i)$ を満たす。

$\mathcal{C} = ad(G)\cdot\xi \subset \mathfrak{g}$ とおく。例3.3 によれば、$Z = P \times_G \mathcal{C}$ は、$J(M,g)$ に埋め込まれ、M上の1つの metric twistor space の構造を持つ。実は、Z は $\mathbb{C}^n$ の

(i) F_i は $\mathbb{C}^n$ の n_i 次元複素部分空間.

(ii) $\mathbb{C}^n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$

なる flag $(F_1,\cdots,F_k)$ 全体から flag manifold $F(n_1,\cdots,n_k;n)$ である。このとき、射影 π は次のように与えられる：

$$\begin{array}{ccccccc}
(F_1,\cdots,F_k) & \in & Z = F(n_1,\cdots,n_k;n) & \hookrightarrow & J(G_r(\mathbb{C}^n)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_Z(F_1,\cdots,F_k) & \in & M = G_r(\mathbb{C}^n) & = & G_r(\mathbb{C}^n) \\
= \sum_{i=1}^{[\frac{k}{2}]} F_{2i} & & & &
\end{array}$$

われわれは、すでに各 $F(n_1,\cdots,n_k;n)$ への J_2-holomorphic map ψ から、harmonic map $\varphi = \pi\circ\psi$ が得られることを知っている。逆の構成をやろう。

$T \subset G_r(\mathbb{C}^n)\times\mathbb{C}^n$ を $G_r(\mathbb{C}^n)$ 上の tautological bundle とする。$T^{(1,0)}G_r(\mathbb{C})$ は、$Hom(T,T^{\perp})$ と同一視できる。

$\varphi : \Sigma \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ をリーマン面 Σ から $G_r(\mathbb{C}^n)$ への写像とする。$\underline{\varphi} = \varphi^{-1}T$ とおく。$\alpha,\beta \in C^\infty(\varphi^{-1}T^{(1,0)}G_r(\mathbb{C}^n)) = C^\infty(Hom(\underline{\varphi},\underline{\varphi}^{\perp}))$

によって、 $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \alpha + \overline{\beta}$ と表わす。β の共役 β^* は、$C^\infty(\mathrm{Hom}(\underline{\varphi}^\perp, \underline{\varphi}))$ の元だから、$\beta^*\alpha \in C^\infty(\mathrm{Hom}(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}))$.

φ harmonic $\iff$ α local holomorphic section of $\varphi^{-1}T^{(1,0)}G_r(\mathbb{C}^n)$

$\iff$ β^* 〃 $\mathrm{Hom}(\underline{\varphi}^\perp, \underline{\varphi})$

に注意する。今、φ が harmonic であると仮定すれば、$\beta^*\alpha\, dz^2$ は $(\overset{2}{\otimes} T^*_{(1,0)}\Sigma) \otimes \mathrm{Hom}(\underline{\varphi}, \underline{\varphi})$ の global holomorphic section である。

命題 4.1. $\varphi : S^2 \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ harmonic map

$\Longrightarrow$ $(\beta^*\alpha)^r \equiv 0$.

証明. $\beta^*\alpha$ の特性多項式を $\chi(t) = \det(tI - \beta^*\alpha) = t^r + a_1 t^{r-1} + \cdots + a_r$ とする。$a_i (dz)^{2i}$ は $\overset{2i}{\otimes} T^*_{(1,0)} S^2$ の holomorphic section である。$(i = 1, \cdots, r)$. Riemann-Roch の定理によって、$a_i = 0$ $(i = 1, \cdots, r)$.

ゆえに、$(\beta^*\alpha)^r \equiv 0$. //

定義 4.2. $\varphi : \Sigma \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ harmonic map とする。

φ "nilconformal" $\iff$ $(\beta^*\alpha)^r \equiv 0$

"nil-order $2k-1$" $\iff$ $\alpha(\beta^*\alpha)^{k-1} \equiv 0$, $(\beta^*\alpha)^{k-1} \not\equiv 0$.

"nil-order $2k$" $\iff$ $(\beta^*\alpha)^k \equiv 0$, $\alpha(\beta^*\alpha)^{k-1} \not\equiv 0$.

注意. φ conformal $\iff$ $\mathrm{trace}(\beta^*\alpha) \equiv 0$

よって、nilconformal $\Longrightarrow$ conformal.

$\varphi : \Sigma \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ を nil-conformal harmonic map とする。まず、α の正則性から (cf. [Bus-2, p68. Lem.(3.6)])、$\mathrm{Im}\,\alpha \subset \underline{\varphi}^\perp$ は、$\underline{\varphi}^\perp$ の holomorphic subbundle $W_1 = \underline{\mathrm{Im}}\,\alpha$ に拡張される。W_1 は Σ のある弧立

点集合を除いて、$\mathrm{Im}\,\alpha$ と一致する。次に、$\beta^*(\underline{W}_1) \fallingdotseq \mathrm{Im}\,\beta^*\alpha$ も同じように $\underline{\varphi}$ の holomorphic subbundle $\underline{V}_1 = \underline{\mathrm{Im}}\,\beta^*\alpha$ に拡張される。この操作を次々と繰り返して行けば、holomorphic subbundles の列

$$\underline{\varphi} \supsetneqq \underline{V}_1 = \underline{\mathrm{Im}}\,\beta^*\alpha \supsetneqq \underline{V}_2 = \underline{\mathrm{Im}}\,(\beta^*\alpha)^2 \supsetneqq \cdots\cdots$$

$$\underline{\varphi}^\perp \supsetneqq \underline{W}_1 = \underline{\mathrm{Im}}\,\alpha \supsetneqq \underline{W}_2 = \underline{\mathrm{Im}}\,\alpha(\beta^*\alpha) \supsetneqq \cdots\cdots$$

を得る。そこで、

$$\underline{\varphi} = \underline{\psi}_2 \oplus \underline{V}_1,\quad \underline{V}_1 = \underline{\psi}_4 \oplus \underline{V}_2,\ \cdots,$$

$$\underline{\varphi}^\perp = \underline{\psi}_1 \oplus \underline{W}_1,\quad \underline{W}_1 = \underline{\psi}_3 \oplus \underline{W}_2,\ \cdots$$

により、subbundles の列 $\underline{\psi}_1, \underline{\psi}_2, \cdots$ を定める。$n_i = \mathrm{rank}\,\underline{\psi}_i$ とおき、$\psi : \Sigma \longrightarrow F(n_1,\cdots,n_k\,;n)$ を $\psi = (\psi_1,\cdots,\psi_k)$ によって定める。このとき、実は、ψ は φ の J_2-holomorphic lift であることが示される。また、Σ から $F(n_1,\cdots,n_k\,;n)$ への J_2-holomorphic map ψ の M への射影 $\varphi = \pi\circ\psi$ は、常に nil-conformal harmonic map であることも示される。

<u>定理</u> 4.3. (Burstall).

$\varphi : \Sigma \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$ nil-conformal harmonic map

k = order of φ. $\mathrm{rank}\,\alpha < n-r$ と仮定してよい) (φ または $\varphi^\perp$ を取ればよい)

$\Rightarrow$ J_2-holomorphic map $\psi : \Sigma \longrightarrow F(n_1,\cdots,n_{k+1} : n)$

が存在して、$\varphi = \pi\circ\psi$ となる。

<u>系</u> 4.4. $\Sigma = S^2$ のとき、nil-conformal の仮定なしに、上の結果が成立する。

注意. $r=1$, $G_r(\mathbb{C}^n) = P_{n-1}(\mathbb{C})$ のとき、Burstall の lifting は Eells-Wood の lifting とはまったく異なるものである.

5. 四元数ケーラー多様体への inclusive harmonic maps.

四元数ケーラー多様体は、その四元数構造から自然な metric twistor space を持つ。そこへの J_2-holomorphic map の射影によって得られる調和写像のクラスを特徴づけよう。リーマン多様体 M は、そのホロノミー群が $Sp(m)\cdot Sp(1)$ に含まれるとき、"四元数ケーラー多様体" と呼ばれる。次の性質は、基本的である.

命題 5.1.

(M, g, A') は 四元数ケーラー多様体 である.

$\Leftrightarrow$ A' は $\mathrm{Hom}(TM, TM)$ の 3 次元部分束で次を満たす.

(a) 任意の点 $p \in M$ に対して、p の近傍 U と U 上の A' に対する局所枠の場 $\{I, J, K\}$ が存在して、

$$I^2 = J^2 = K^2 = -id,\ IJ = -JI = K,$$

$$JK = -KJ = I,\ KI = -IK = J.$$ を満たす.

(b) 任意の $L \in A'$ に対して、$\langle Lu, v\rangle + \langle u, Lv\rangle = 0$.

(c) A' は、$\mathrm{Hom}(TM, TM)$ における平行移動に関して不変である.

(a) における $\{I, J, K\}$ を A' の "局所標準基 (local canonical basis)" と呼ぶ。

M を実 $4m$ 次元の四元数ケーラー多様体とするとき、

$$\begin{aligned} Z &= \{ L \in A' \; ; \; |L|^2 = 4m \} \\ &= \{ aI + bJ + cK \; ; \; a^2+b^2+c^2 = 1 \} \subset J(M, g) \end{aligned}$$

とおくと、Z は、ファイバーを $S^2 = P_1(\mathbb{C})$ とする M 上の1つの metric twistor space である。その射影を $\pi_Z : Z \longrightarrow M$ で表わす。ここでは、Eells-Salamon [E-S-1] の結果を紹介する。

$X \in T_pM$ に対して、$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{ X, L(X) \; (L \in A'_p) \}$ を"四元数1次元部分空間"と呼ぶ。

定義 5.2. 写像 $\varphi : \Sigma \longrightarrow M$ に対して、

φ "inclusive" $\iff$ $\forall p \in \Sigma$ に対して、$d\varphi(T_p\Sigma)$ は $T_{\varphi(p)}M$ の四元数1次元部分空間に含まれる。

命題 5.3.

$\psi : \Sigma \longrightarrow Z$ J_2-holomorphic map

$\Rightarrow$ $\varphi = \pi_Z \circ \psi : \Sigma \longrightarrow M$ inclusive, conformal harmonic map

これは、命題2.2.(2) からすぐにわかるであろう。

この逆が成立する。

定理 5.4. (Eells-Salamon)

$\varphi : \Sigma \longrightarrow M$ inclusive conformal harmonic map

$\Rightarrow$ J_2-holomorphic map $\psi : \Sigma \longrightarrow Z$ が唯一つ存在して、$\varphi = \pi \circ \psi$ となる。

<u>証明</u>. $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ の holomorphicity によって、E $(=\varphi^{-1}TM^{\mathbb{C}})$ のある holomorphic subbundle $\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}}$ が存在して、

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\} \subset \underline{\{\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\}} \subset E.$$

で、Σ のある孤立点集合を除いて、

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\} = \underline{\{\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\}}$$ が成り立つ。

$A_0 = \{ L \in \varphi^{-1}A' \,;\, L\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}} = \underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}} \}$ とおく。φ の inclusive condition によって、任意の $p\in\Sigma$ に対して、$(\varphi^{-1}A')_p$ の canonical basis $\{I, J, K\}$ を $I\in(A_0)_p$ となるように取る。このとき、容易に、$\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}}_p \perp J\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}}_p$, $\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}}_p \perp K\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}}_p$ がわかる。A_0 は、$\varphi^{-1}A'$ の 1 次元ベクトル部分束である。$Z_0 = Z\cap A_0$ とおく。このとき、Z_0 の global section I で、$\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}}$ 上で $I=\sqrt{-1}\,\mathrm{id}$ なるものが存在する。E_+, E_- をそれぞれ I の $(\sqrt{-1})$-, $(-\sqrt{-1})$-eigen subbundle とすると、$E=E_+\oplus E_-$, $E_+\supset\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}}$ となる。$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}I)(\frac{\partial\varphi}{\partial z}) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}(I(\frac{\partial\varphi}{\partial z})) - I(\cancel{\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}}) = \sqrt{-1}\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ だから、$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}I)\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}} \equiv 0$. $\varphi^{-1}A'$ の local section J, K を、$\{I, J, K\}$ が $\varphi^{-1}A'$ の local canonical basis となるように取る。$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}I = aJ + bK$ と書くことができる。$0\neq v\in\underline{\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}}$ に対して、$0 = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}I)(v) = aJ(v) + bK(v) = J(av - bI(v)) = J(av - b\sqrt{-1}v) = (a-\sqrt{-1}b)J(v)$.
$\therefore\ a=\sqrt{-1}b$. よって、$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}I = bJ(\sqrt{-1}-I)$. 従って、$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}I)E_+ = 0$.
すなわち、$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}C^\infty(E_+)\subset C^\infty(E_+)$. そこで、$\psi:\Sigma\longrightarrow Z$ を $\psi(p) = I_p$ $(p\in\Sigma)$ と定めれば、ψ は φ の J_2-holomorphic lift である。
一意性も明らか。//

注意. 向き付けられた4次元リーマン多様体は、常に、四元数ケーラー多様体である。この場合の上の結果は、Eells-Salamon [E-S-2, Cor. 5.4] による。この論文において、この場合の詳細な研究がなされている。

最近、[Bus-R], [Bus-W], [Chr-W2], [Eel], [Oh-1] において目覚ましい研究がなされている. 時間の都合で、残念ながらここでは、それらについて紹介することはできない。

Part II. Stability of Harmonic Maps.

1. Riemannian manifolds with positive curvature on totally isotropic 2-planes.

(M, g) を n 次元のリーマン多様体とする。R にとって、その曲率テンソルを R によって表わす。$\Lambda^2 TM$ へ作用する曲率作用素 $\mathcal{R}$ は、

$$\langle \mathcal{R}(u \wedge v), w \wedge z \rangle = \langle R(u, v) z, w \rangle \quad (u, v, z, w \in T_pM)$$

によって定義される。$\mathcal{R}$ は $\Lambda^2 TM$ の対称な自己準同型である。

定義 1.1.

M "positive curvature operator" ("nonnegative curvature operator")

$\Longleftrightarrow$ $\forall \xi \in \Lambda^2 TM$, $\xi \neq 0$ に対して、$\langle \mathcal{R}(\xi), \xi \rangle > 0$ (≥ 0).

次の問題は有名である。

Problem.

(M, g) : simply connected compact Riemannian manifold. with positive curature operator.

$\Longrightarrow$ M は球面 S^n に微分同相か？

次のよく知られた部分的解答がある。

(Meyer [Me])

M : compact Riemannian manifold positive curvature operator $\Longrightarrow$ $H^i(M, \mathbb{R}) = H^i(S^n, \mathbb{R})$ $(i = 1, \cdots, n-1)$

(Tachibana [Tac])

M : compact nonnegative curvature operator harmonic curvature $\Longrightarrow$ M は locally symmetric.
さらに M が posive curvature operator ならば、M は標準的球面 S^n に等長同型.

(Hamilton [Ham-2])

M : simply connected, compact, $n=3.4$ positive curvature operator $\Longrightarrow$ M は S^n に微分同相.

Part I におけるように、$z \in T_pM^{\mathbb{C}}$ は $(z, z)=0$ なるとき、"isotropic" と呼び、$T_pM^{\mathbb{C}}$ の複素部分空間 V は、$(z, z)=0$ となるとき、"totally isotropic" であると呼ぶことにする。$\mathcal{R}$ の complex extension も $\mathcal{R} : \Lambda^2 TM^{\mathbb{C}} \longrightarrow \Lambda^2 TM^{\mathbb{C}}$ によって表わす.

<u>定義</u> 1.2.

M "positive (nonnegative) curvature on totally isotropic 2-planes".

$\Leftrightarrow$ 任意の $p \in M$, totally isotropic 2-plane $\sigma \subset T_pM^{\mathbb{C}}$ に対して、

その複素断面曲率 $$\mathcal{K}(\sigma) = \frac{\langle\langle \mathcal{R}(z\wedge w), \bar{z}\wedge \bar{w} \rangle\rangle}{\| z\wedge w\|^2} > 0 \quad (\geq)$$

ここで、$\{z, w\}$ は σ の basis である.

<u>注</u>. M positive sectional curature $\Leftrightarrow$ $\forall p \in M$, $\forall \sigma \subset T_pM^{\mathbb{C}}$ real 2-plane $(\bar{\sigma}=\sigma)$ $\mathcal{K}(\sigma) > 0$.

<u>命題</u> 1.3.

(1) positive curature operator $\Longrightarrow$ positive curvature on totally isotropic 2-planes.

(2) pointwise (1/4)-pinched
i.e. M 上の $\delta > 0$ なる関数が存在して、M の sectional curature K は $\delta \cdot \frac{1}{4} < K \leq \delta$ をみたす. $\Longrightarrow$ positive curvature on totally isotropic 2-planes.

(1) は、定義から明らか。(2) は、Berger の curvature components estimates から容易に出る。

Micallet と Moore は、独立に次の強力な結果を得た。

定理 1.4. (Micallet - Moore [Mi-Mo]).

M : simply connected compact n-dimensional Riemannian manifold with positive curvature on totally isotropic 2-planes ($n \geq 4$).

$\Longrightarrow$ M は S^n に位相同型である。

彼らは、次の2つの定理を示すことにより、この定理を得た。

定理 A. M : Riemannian manifold. $n = \dim M$.

positive curvature on totally isotropic 2-planes.

$\varphi : S^2 \longrightarrow M$ nonconstant harmonic 2-sphere

$\Longrightarrow$ index of $\varphi \geqq \frac{n}{2} - \frac{3}{2}$.

定理 B. M : compact Riemannian manifold.

$\pi_k(M) \neq 0$ ($k \geq 2$)

$\Longrightarrow$ nonconstant harmonic 2-sphere $\varphi : S^2 \longrightarrow M$ が存在して、index of $\varphi \leqq k-2$ を満たす。

定理 1.4 の証明. $k \geq 2$, $\pi_k(M) \neq 0$ ならば、定理 B より M の nonconst. harmonic 2-sphere φ が存在して、index of $\varphi \leqq k-2$. 一方、定理 A. より、index of $\varphi \geqq \frac{n}{2} - \frac{3}{2}$. これより、$k \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$. よって、$\pi_i(M) = \{1\}$ ($1 \leq i \leq \frac{n}{2}$).
Hurewitz の定理. Poincare の duality によって、M は homotopy sphere である。

Smale ($n \geq 5$)、Freedman ($n=4$) の Poincare 予想 の解決により、M は S^n に位相同型である。

<u>注意</u>. Berger らの有名な定理により、次が知られている：

M : simply connected compact Riemannian manifold.

$\frac{1}{4} \leq K \leq 1$

$\Longrightarrow$ (1) M は S^n に位相同型、あるいは、

(2) M は、$P_m(\mathbb{C})$、$P_m(\mathbb{H})$、$P_2(\mathbb{C}ay)$ に等長同型である。

Micallef-Moore の定理 および holonomy group に関する Berger [Beg]、Simons [Si-1]、Brown-Gray、Alekseevski らの結果、上の Tachibana の定理、そして、Hamilton [Ham-1, Thm.4.2]、[Ham-2, Thm.8.3] の結果 を合わせると次をわれわれは知る：

M : simply connected compact Riemannian manifold with nonnegative curvature operator.

$\Longrightarrow$ (1) M は S^n に位相同型、

(2) M は $P_m(\mathbb{C})$ に微分同相、あるいは、

(3) M は コンパクト型対称空間 に等長同型、

および (1)、(2)、(3) たちのリーマン直積。

2. Index of harmonic 2-spheres.

$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をリーマン球面、(z) を $\mathbb{C}$ 上での standard conformal coordinate とする。ds^2 を $\int_{S^2} dA = 1$ と正規化された S^2 上の

standard metric とする。その体積要素を dA で表わしている。

$\varphi : S^2 \longrightarrow M$ を harmonic 2-sphere とする。 I をその index form とする。I は、$C^\infty(\varphi^{-1}TM)$ 上の symmetric bilinear form である。

I の $C^\infty(\varphi^{-1}TM^{\mathbb{C}})$ への complex extension も、I で表わす。Index form I の complex version は、次のように与えられる。

<u>補題</u> 2.1. $\mathbb{W} \in C^\infty(\varphi^{-1}TM^{\mathbb{C}})$ に対して、

$$I(\mathbb{W}, \mathbb{W}) = 4\int_{S^2}\left\{ \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar z}} \mathbb{W}\|^2 - \langle\!\langle \mathcal{R}(\mathbb{W}\wedge \tfrac{\partial \varphi}{\partial z}), \mathbb{W}\wedge\tfrac{\partial\varphi}{\partial z} \rangle\!\rangle \right\} dx\wedge dy.$$

$$(z = x+\sqrt{-1}\,y)$$

M は、positive curvature on totally isotropic 2-planes と仮定する。まず、Grothendieck の定理 [Grt] によって、$E = \varphi^{-1}TM^{\mathbb{C}}$ は、S^2 上の holomorphic line bundles の直和に分解する：

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n \ , \quad L_i : S^2 \text{上の holomorphic line bundle.} \ (i=1,\cdots,n)$$

S^2 上で evaluate された L_i の Chern class を $c_1(L_i)$ で表わす。このとき、

$$c_1(L_1) \geqq c_1(L_2) \geqq \cdots \geqq c_1(L_n)$$

と仮定してよい。
$$\begin{array}{ccc} E & \simeq & E^* \\ \Psi & & \Psi \\ w & \longmapsto & (\cdot, w) \end{array}$$
により、E と E^* は同型になるから、$c_1(E) = c_1(E^*) = -c_1(E)$、ゆえに、$c_1(E) = 0$. これと E の holomorphic line bundles への分解の一意性により、

$$c_1(L_i) = -c_1(L_{n-i+1}) \qquad (i=1,\cdots,n).$$

また、$c_1(L_i) + c_1(L_j) \neq 0 \Rightarrow (L_i, L_j) = 0$ も容易に観察される。今、$E = E_0 \oplus E_+ \oplus E_-$ とおく。ここで、

$$E_0 = \sum \{ L_i \,;\, c_1(L_i) = 0 \} = \bar{E}_0 \quad \text{trivial} ,$$
$$E_+ = \sum \{ L_i \,;\, c_1(L_i) > 0 \} ,$$
$$E_- = \sum \{ L_i \,;\, c_1(L_i) < 0 \} = \bar{E}_+ .$$

$I \subset E_0$ を E_0 の maximal isotropic subbundle する．ここで，$\mathrm{rank}\, I = \left[\frac{\mathrm{rank}\, E_0}{2}\right]$．
$I \oplus E_+$ は，E の isotropic subbundle となる．また，$\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ は，E_+ の global holomorphic section になる。従って，補題2.1 より，

$$\begin{aligned} \text{index of } \varphi &\geqq \dim_{\mathbb{C}} \{ \text{holomorphic sections of } I \oplus E^+ \} - 1 \\ &\geqq \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - 1 \qquad (\text{Riemann-Roch の定理により}) \\ &= \frac{n}{2} - \frac{3}{2} . \end{aligned}$$

よって，定理 A が得られた。

3. Existence of harmonic 2-spheres.

M をコンパクトリーマン多様体とする．M はある $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれていると仮定する（Nash imbedding theorem）．$\alpha > 1$ に対して，$L_1^{2\alpha}(S^2, M)$ を一階の weak derivatives が $L^{2\alpha}$ に属する写像 $\varphi : S^2 \longrightarrow M$ 全体の Sobolev space とする。$L_1^{2\alpha}(S^2, M)$ は，Banach space $L_1^{2\alpha}(S^2, \mathbb{R}^N)$ の C^2 separable, closed Banach submanifold である．明らかに，$C^\infty(S^2, M) \subset L_1^{2\alpha}(S^2, M)$。Sobolev imbedding theorem によって，$L_1^{2\alpha}(S^2, M) \subset C^0(S^2, M)$．3つの空間 $C^\infty(S^2, M) \subset L_1^{2\alpha}(S^2, M) \subset C^0(S^2, M)$ は，同じホモトピー型を持つ。M のホモトピー群の非自明からこれらの写像空間のホモトピー群の非自明が出る．われわれは，

モース理論の方法により、index が希望の条件を満たす nonconstant harmonic 2-sphere を見つける。一般に、エネルギー汎関数 E に対して、モース理論は適用できない。まず、E を摂動した汎関数を考える。Sacks-Uhlenbeck [Sa-U] によって、"α-energy" E_α の概念が導入された。$\alpha \geq 1$ に対して、

$$E_\alpha : L_1^{2\alpha}(S^2, M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad を、$$

$$E_\alpha(\varphi) = \int_{S^2} (1 + \|d\varphi\|^2)\, dA \qquad (\varphi \in L_1^{2\alpha}(S^2, M))$$

によって定める。定理 B の証明の方法は、[Sa-U] の仕事に基礎を置いている。E_1 は、エネルギー汎関数 E と同値である。[Sa-U] は、E_α の臨界写像の存在、収束の理論を作り、その応用として、harmonic 2-sphere の存在定理を示している。$\alpha > 1$ に対して、E_α は Palais-Smale condition (C) を満たす (cf. [Sa-U])。

$$T_\varphi L_1^{2\alpha}(S^2, M) = \{ V : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^N,\ L_1^{2\alpha}\text{-map}.\ V(p) \in T_{\varphi(p)}M \ (\forall p \in S^2) \}$$

とおくと、E_α の臨界点 $\varphi \in L_1^{2\alpha}(S^2, M)$ における E_α の Hessian は、continuous symmetric bilinear form $\delta^2 E_\alpha(\varphi) : T_\varphi L_1^{2\alpha}(S^2, M) \times T_\varphi L_1^{2\alpha}(S^2, M) \longrightarrow \mathbb{R}$ である。

<u>補題</u> 3.1. $\pi_k(M) \neq 0 \quad (k \geq 2)$

$\Rightarrow$ E_α の nonconstant critical map $\varphi_\alpha \in L_1^{2\alpha}(S^2, M)$ が存在して、次を満たす：　([Sa-U] より、$\varphi_\alpha \in C^\infty(S^2, M)$)

(1) index of $\varphi_\alpha \leqq k-2$.

(2) αに独立な定数$B>0$が存在して、$E_\alpha(\varphi_\alpha)\leqq(1+B^2)^\alpha$となる。

補題3.1は、次のようにして示される。$\Omega(S^2,M)$をS^2からMへのbase pointを保つ写像の全体の空間とする。ホモトピー群の完全系列を使って、$\pi_{k-2}(\Omega(S^2,M))=\pi_{k-2}(L_1^{2\alpha}(S^2,M),i(M))$を得る。ここで、埋め込み$i: M\longrightarrow L_1^{2\alpha}(S^2,M)$は、$p\in M$に定数写像$c_p$を対応させて定められる。$0\neq\pi_k(M)=\pi_{k-2}(\Omega(S^2,M))$だから、$\pi_{k-2}(L_1^{2\alpha}(S^2,M),i(M))\neq 0$を得る。これより、$\alpha$に独立な定数$B>0$が存在して、$\pi_{k-2}(E_\alpha^{-1}[1,(1+B^2)^\alpha],i(M))\neq 0$となる。なぜならば、$\pi_{k-2}(L_1^{2\alpha}(S^2,M),i(M))\neq 0$より、$C^\infty$写像$\gamma: S^{k-2}\longrightarrow L_1^{2\alpha}(S^2,N)$で$i(M)$へのどんな写像にもホモトープでないものが存在する。$B=\mathrm{Max}\{\|(d\gamma(x))(p)\|; x\in S^{k-2}, p\in S^2\}$とすればよい。$E_\alpha$は、「nonconstantな臨界点はweakly nondegenerateかつfinite indexを持つような汎関数」で近似され得る。そのような汎関数に対しては、Banach manifold上のモース理論(Uhlenbeck [Uh-2], Tromba [Tr-1])が適用できる。そこでは、Morseのハンドル分解定理が確立されている。$\psi\in L^1(S^2,\mathbb{R}^N)$に対して、

$$E_{\alpha,\psi}(\varphi)=E_\alpha(\varphi)+\int_{S^2}(\varphi\cdot\psi)\,dA \qquad (\varphi\in L_1^{2\alpha}(S^2,M))$$

と定める。$\psi(i)\in C^\infty(S^2,M)$を取り、$\|\psi(i)\|_{2\alpha}\longrightarrow 0\ (i\longrightarrow\infty)$かつ$E_{\alpha,\psi(i)}$はそのような汎関数になるようにできる。[Sa-U]より、deformation retraction $E_\alpha^{-1}[1,1+\delta]\longrightarrow E_\alpha^{-1}(1)=i(M)$が存在する。

$\delta>0$ は、α に独立である。Morse のハンドル分解定理により、$E_\alpha^{-1}[1+\delta,(1+B^2)^\alpha]$ に $k-2\geq$ の index を持つ $E_{\alpha,\psi(i)}$ の臨界点がなければならない。$E_{\alpha,\psi(i)}$ の nonconstant な臨界写像 $\varphi_{\alpha,\psi(i)}$ が存在して、index of $\varphi_{\alpha,\psi(i)}\leqq k-2$、$E_\alpha(\varphi_{\alpha,\psi(i)})\leqq(1+B^2)^\alpha$ を満たす。E_α の Palais-Smale の condition (C) により、$\{\varphi_{\alpha,\psi(i)}\}$ の closure において E_α の nonconstant な臨界写像 φ_α が存在して、index of $\varphi_\alpha\leqq k-2$、$E_\alpha(\varphi_\alpha)\leqq(1+B^2)^\alpha$ を満たす。よって、補題 3.1. を得る.

[Sa-U, Thm.3.3] により、α に独立な $\varepsilon>0$ が存在して、$E(\varphi_\alpha)>\varepsilon$ となる。[Sa-U] の E_α の臨界写像の収束定理によって、部分列 $\alpha(i)\longrightarrow 1$ を取って、$\varphi_{\alpha(i)}$ は、S^2 上の有限個の点 $\{p_1,\cdots,p_l\}$ を除いて harmonic 2-sphere $\varphi: S^2\longrightarrow M$ に C^1-収束する。このとき、φ が constant になる場合とそうでない場合がある.

1) φ が nonconstant map の場合. $m=$ index of φ とおく. 適当な cutoff function を使って、$V_1,\cdots,V_m\in C^\infty(\varphi^{-1}TM)$ で、$\left((\delta^2E)(\varphi)(V_j,V_k)\right)_{(j,k)}<0$ かつ $\{p_1,\cdots,p_l\}$ の近傍で、$V_j\equiv 0$ $(j=1,\cdots,l)$ なるものが取れる。$\varphi_{\alpha(i)}$ が、$S^2-\{p_1,\cdots,p_l\}$ 上 φ に C^1-収束することから、$V_1(i),\cdots,V_m(i)\in C^\infty(\varphi_{\alpha(i)}^{-1}TM)$ を作って、$\{p_1,\cdots,p_l\}$ の近傍で $V_j(i)\equiv 0$ $(j=1,\cdots,l)$ かつ $V_j(i)$ は V_j に S^2 上 C^1-収束するようにできる。$\alpha(i)$ が十分 1 に近ければ、$\left((\delta^2E_{\alpha(i)})(\varphi_{\alpha(i)})(V_j(i),V_k(i))\right)_{(j,k)}<0$。index of $\varphi_{\alpha(i)}\leqq k-2$ だから、$m\leqq k-2$.

2) φ が constant map の場合. [Sa-U] のトリックを使って、

noncostant な harmonic 2-sphere を作り出せばよい。各 i に対して，
$\frac{1}{r_i} = \sup\{\|d\varphi_{\alpha(i)}(p)\| ; p \in S^2\}$ とおく。$p_0 \in S^2$ を $\|d\varphi_{\alpha(i)}(p_0)\| = \frac{1}{r_i}$ と
取る。standard conformal coordinate $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を $0 = p_0$ とな
るよう取る。$g_i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を $g_i(z) = r_i z$ $(z \in \mathbb{C})$ と定める。
$\tilde{\varphi}_i = \varphi_{\alpha(i)} \circ g_i : \mathbb{C} \longrightarrow M$ とおく。[Sa-U. Thm.4.6] の議論によ
り、$\{\tilde{\varphi}_i\}$ の適当な部分列を取ることにより、$E(\tilde{\varphi}_\infty) < \infty$ なる
nonconstant harmonic map $\tilde{\varphi}_\infty : \mathbb{C} \longrightarrow M$ が存在して，$\tilde{\varphi}_i$ は $\mathbb{C}$ の
任意の compact 部分集合上で $\tilde{\varphi}_\infty$ に C^1 収束する。[Sa-U. Thm.3.6]
の調和写像の孤立特異点の除去可能定理により、harmonic 2-sphere
$\tilde{\varphi}_\infty : S^2 \longrightarrow M$ へ拡張する。後は、少し複雑になるが，1) と同
様の議論により index of $\tilde{\varphi}_\infty \leqq k-2$ を得る。

従って、定理 B が得られた。

4. Stable harmonic 2-spheres in manifolds of nonnegative curvature on totally isotropic 2-planes.

さらに、[Mi-Mo] では，totally isotropic 2-planes 上 nonnegative curvature のリーマン多様体の stable harmonic 2-sphere の性質を研究している。

定理 4.1. (M, g) n-dim. Riemannian manifold.

(1) $\dim M =$ even のとき，

M : Riemannian manifold with nonnegative curvature on totally isotropic

2-planes.

$\varphi : S^2 \longrightarrow M$ stable harmonic 2-sphere

$\Longrightarrow$ φ は、$J(M.g)$ への horizontal, holomorphic lift を持つ。

(2) $\dim M = \text{odd}$ のとき、$n = 2k+1$ とおく。

$M \times S^1$: nonnegative curvature on totally isotropic 2-planes.

$\varphi : S^2 \longrightarrow M$ stable harmonic 2-sphere.

$\Rightarrow$ φ は $F_{2k}(M.g)$ への horizontal, holomorphic lift を持つ。

<u>問題</u>.

M : simply connected compact Riemannian manifold

with nonnegative curvature on totally isotropic 2-planes

を分類せよ。

References

[Ai-1] A. R. Aithal; Harmonic maps from S^2 to $G_2(\mathbb{C}^5)$, J. London Math. Soc. (2) 32 (1985), 572-576.

[Ai-2] A. R. Aithal; Harmonic maps from S^2 to $\mathbb{H}P^2$, Osaka J. Math. 23 (1986), 255-270.

[Am-1] Ju. A. Aminov; On the problem of stability of a minimal surfaces in a Riemannian space of positive curvature, Soviet Math. Dokl. 16 (1975), 1278-1281.

[Am-2] Ju. A. Aminov; On the instability of a minimal surface in an n-dimensional Riemannian space of positive curvature, Math. USSR Sbornik 29 (1976), 359-375.

[At-Bo] M. F. Atiyah and R. Bott; the Yang-Mills equations over Riemman surfaves, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A308 (1982), 523-615.

[At-H-S] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin and I. M. Singer; Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 362 (1978), 425-461.

[Ban-Oh] S. Bando and Y. Ohnita; Minimal 2-spheres with constant curvature in $P_n(\mathbb{C})$, J. Math. Soc. Japan 39 (1987).

[Bar] J. Barbosa; On minimal immersions of S^2 into S^{2m}, Trans. Amer. Math. Soc. 210 (1975), 75-106.

[Be-O] L. Berard Bergery and T. Ochiai; On some generalization of the twistor spaces, Global Riemannian Geomerty, edited by T. J. Willmore and N. Hitchin, 1984, 52-59.

[Beg] M. Berger; Sur les groupes d'holonomie das variétés à connexion affime et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. Math. France 83 (1955), 279-330.

[Bol-J-R-W] J. Bolton, G. R. Jensen, M. Rigori and L. M. Woodward; On conformal minimal immersions of S^2 into $\mathbb{C}P^n$, a preprint.

[Bor] O. Borůvka; Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espéce, J. Math. Pures Appl. (9) 12 (1933), 337-383.

[Bou-L-S] J. P. Bourguignon, H. B. Lawson, Jr. and J. Simons; Stability and gap phenomena for Yang-Mills fields, Proc. Natl. acad. Sci. USA 76 (1979), 1550-1553.

[Bou-L] J.-P. Bourguignon and H. B. Lawson, Jr.; Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields, Commun. Math. Phys. 79 (1981), 189-230.

[Br-1] R. L. Bryant; Submanifolds and special structures on the octonions, J. Diff. Geom. 17 (1982), 185-232.

[Br-2] R. L. Bryant; Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere, J. Diff. Geom. 17 (1982), 455-473.

[Br-3] R. L. Bryant; A duality theorem for Willmore surfaces, J. Diff. Geom. 20 (1984), 23-53.

[Br-4] R. L. Bryant; Lie groups and twistor spaces, Duku Math. J. 52 (1985), 223-261.

[Bun] D. Burns; Harmonic maps from $\mathbb{C}P^1$ to $\mathbb{C}P^n$, Harmonic Maps, Proc. New Orleans 1980, Lecture Notes in Math. 949, Springer-Verlag, 1982, 48-56.

[Bus-1] F. E. Burstall; Twistor fibrations of flag manifolds and harmonic maps of a 2-sphere into a Grassmannian, Differential Geometry, L. A. Cordero (editor), Reseach Notes in Math. 131, Pitman, 1985, 7-16.

[Bus-2] F. E. Burstall; A twistor description of harmonic mpas of 2-sphere into a Grassmannian, Math. Ann. 274 (1986), 61-74.

[Bus-R] F. Burstall and J. Rawnsley; Harmonic spheres in compact Lie groups and holomorphic curves in homogeneous spaces, C. R. Acad. Sc. Paris 302, Série IO n°20 (1986), 709-712.

[Bus-W] F. E. Burstall and J. C. Wood; The construction of harmonic maps into complex Grassmannians, J. Diff. Geom. 23 (1986), 255-297.

[Ca-1] E. Calabi; Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima, in "Topics in Complex manifolds," pp.59-81, Univ. of Montréal, 1967.

[Ca-2] E. Calabi; Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, J. Differential Geom. 1 (1967), 111-125.

[Cao-C] H.-D. Cao and B. Chow; Compact Kähler manifolds with nonnegatieve curvature operator, Invent. Math. 83 (1986), 553-556.

[Chn-Na-1] B. Y. Chen and T. Nagano; Totally geodesic submanifolds in symmetric spaces I, Duke Math. J. 44 (1977), 745-755.

[Chn-Na-2] B. Y. Chen and T. Nagano; Totally geodesic submanifolds in symmetric spaces II, Duke Math. J. 45 (1978), 405-425.

[Chn-Na-3] B. Y. Chen, P. F. Leung and T. Nagano; Totally geodesic submanifolds in symmetric spaces III, a preprint.

[Chr-1] S. S. Chern; On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature, in "Problems in Analysis," pp.27-40. Princiton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

[Chr-2] S. S. Chern; On minimal spheres in the four sphere, Studies and essays presented to T. W. Chen, Taiwan, (1970), 137-150.

[Chr-W1] S. S. Chern and J. G. Wolfson; Minimal surfaces by moving frames, Amer. J. Math. 105 (1983), 59-83.

[Chr-W2] S. S. Chern and J. G. Wolfson; Harmonic maps of S^2 into a complex Grassmann manifold, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 82 (1985), 2217-2219.

[Chr-W3] S. S. Chern and J. G. Wolfson; Harmonic maps of the two-spheres into a complex Grassmann manifold II, Ann. of Math. 125 (1987), 301-335.

[D-Z-1] A. M. Din and W. J. Zakrzewski; General classical solutions in the $\mathbb{C}P^{n-1}$ model, Nuclear Phys. B 174 (1980), 397-406.

[D-Z-2] A. M. Din and W. J. Zakrzewski; Properties of general classical $\mathbb{C}P^{n-1}$ solutions, Physics letters 95B (1980), 419-422.

[Do-Pe] M. do Carmo and C. K. Peng; Stable minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1 (1986), 903-906.

[E-L-1] J. Eells and L. Lemaire; A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10 (1978), 1-68.

[E-L-2] J. Eells and L. Lemaire; On the construction of harmonic and holomorphic maps between surfaces, Math. Ann. 252 (1980), 27-52.

[E-L-3] J. Eells and L. Lemaire; Selected topics in harmonic maps, C.B.M.S. Regional Conference Series 50, American Math. Soc. (1983).

[E-S-1] J. Eells and S. Salamon; Constructions twistorielles des applications harmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris, 296 (1983), 685-687.

[E-S-2] J. Eells and S. Salamon; Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 12 (1985), 589-640.

[E-Sm] J. Eells and J. H. Sampson; Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86 (1964), 303-310.

[E-W-1] J. Eells and J. C. Wood; Restrictions on harmonic maps of surfaces, Topology 15 (1976), 263-266.

[E-W-2] J. Eells and J. C. Wood; The existence and construction of certain harmonic maps, in "Symp. Math., XXVI," pp. 123-138, Rome, 1981.

[E-W-3] J. Eells and J. C. Wood; Maps of minimum energy, J. London Math. Soc. 23 (1981), 303-310.

[E-W-4] J. Eells and J. C. Wood; Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces, Advanced in Math. 49 (1983), 217-263.

[E] J. Eells; Gauss maps of surfaces, in Perspective in Mathematics, Anniversary of Oberwolfach 1984, Birkhäuser, 111-129.

[Eel] J. Eells; Loop groups and harmonic maps, a manuscript, Eells-Rawnsley seminar, 1985. From Prof. S. Murakami, at Osaka university, May 15, 1987.

[Ej-1] N. Ejiri; The index of minimal immersions of S^2 into S^{2n}, Math. Z. 184 (1983), 127-132.

[Ej-2] N. Ejiri; Equivariant minimal immersions of S^2 into $S^{2m}(1)$, Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1986), 105-124.

[Ej-3] N. Ejiri; Calabi lifting and surface geometry, to appear in Tokyo J. Math.

[Ej-4] N. Ejiri; Isotropic harmonic maps of Riemman surfaces into the de sitter space time, a preprint.

[Ej-5] N. Ejiri; Willmore surfaces with a duality in $S^N(1)$, a preprint.

[Er-1] S. Erdem; Harmonic maps into real hyperbolic space, Note di Matematica 3 (1983), 29-44.

[Er-2] S. Erdem; Harmonic maps from surfaces into pseudo-Riemannian spheres and hyperbolic spaces, Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 94 (1983), 483-494.

[Er-G] S. Erdem and J. F. Glazebrook; Harmonic maps of Riemann surfaces to indefinite complex hyperbolic and projective spaces, Proc. London Math. Soc. (3) 47 (1983), 547-562.

[Er-Wo] S. Erdem and J. C. Wood; On the construction of harmonic maps into a Grassmannian, J. London Math. Soc. (2), 28 (1983), 161-174.

[Es-T-G] J. H. Eschenberg, R. de A. Tribuzy and I. V. Guadalupe; The fundamental equations of minimal surfaces in $\mathbb{C}P^2$, Math. Ann. 270 (1985), 571-589.

[Fi] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen; The structure of complete stable minimla surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature, Commun. Pure Appl. Math. 33 (1980), 199-211.

[Fr-K] Th. Friedrich and H. Kurke; Compact four-dimensional self-dual Einstein manifolds with positive scalar curvature, Math.

Nachr. 106 (1982), 271-299.

[Fr] T. Friedrich; On surfaces in four-spaces, Ann. Glob. Analysis and Geometry, 2 (1984), 257-287.

[Fu] A. Futaki; Nonexistence of minimizing harmonic maps from 2-spheres, Proc. Japan Acad. 56 Ser.A. (1980), 291-293.

[Ga-R-S-B] W-D. Garber, S. N. M. Ruijsenaars, E. Seiler and D. Burns, On finite action solutions of the nonlinear σ-model, Ann. of Phys. 119 (1979), 305-325.

[Gal-M] S. Gallot and D. Meyer; Operateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, J. Math. pura et appl. 54 (1975), 259-284.

[Gl-1] J. F. Glazebrook; The construction of a class of harmonic maps to quaternionic projective space, J. London Math. Soc. (2) 30 (1984), 151-159.

[Gl-2] J. F. Glazebrook; On isotropic harmonic maps to real and quaternionic Grassmannians, Contemporary Mathematics 49 (1986), 51-61.

[Gr] M. Gromov; Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. math. 82 (1985), 307-347.

[Grt] A. Grothendieck; Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math. 79 (1957), 121-138.

[Gu-R] I. V. Guadalupe and L. Rodriguez, Normal curvature of surfaces in space forms, Pacific J. Math., 106 (1983), 95-102.

[Gue-1] M. A. Guest; Geodesics, harmonic maps and Yang-Mills equations, Topics in several complex variables, Research Notes in Math. 112, Pitman, 1985, 102-108.

[Gue-2] M. A. Guest; Topology of the space of absolute minima of the energy functional, Amer. J. Math. 106 (1984), 21-42.

[Gue-3] M. A. Guest; Geometry of maps between generalized flag manifolds, J. Differential Geom. 25 (1987), 223-247.

[Gul-O-R] R. D. Gulliver, R. Ossermann and H. Royden; A theory of branched immersions of surfaces, Amer. J. Math. 95 (1973), 750-812.

[Ham-1] R. Hamilton; Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom. 17 (1982), 255-306.

[Ham-2] R. Hamilton; Four-manifolds with posiive curvature, J. Differential Geom. 24 (1986), 153-179.

[Har-La] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr.; Calibrated Geometries, Acta Math. 148 (1982), 47-157.

[Hi-1] N. J. Hitchin; Kählerian twiator spaces, Proc. London Math. Soc. (3) 43 (1981), 133-150.

[Hi-2] N. J. Hitchin; Monopoles and geodesics, Commun. Math. Phys. 83 (1982), 579-602.

[Ho-We-1] R. Howard and S. W. Wei; Non-existence of stable harmonic maps to and from certain homogeneous spaces and submanifolds of Euclidean space, Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), 319-331.

[Ho-We-2] R. Howard and S. W. Wei; On the existence and nonexistence of stable submanifolds and currents in positively curved manifolds and the topology of submanifolds in Euclidean spaces, a preprint.

[Is] T. Ishihara; The index of a holomorphic mapping and the index theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977), 169-174.

[Je-R-Y] G. R. Jensen, M. Rigoli and K. Yang; Holomorphic curves in the complex quadric, Bull. Austral. Math. Soc. 35 (1987), 125-148.

[Kaw-1] S. Kawai; On the instability of a minimal surface in a 4-manifold whose curvature lies in the interval (1/4, 1], Publ. RIMS Kyoto Math. 18 (1982), 1067-1075.

[Kaw-2] S. Kawai; A theorem of Bernstein type for minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$, Tohoku Math. J. 36 (1984), 377-384.

[Kaw-3] S. Kawai; On non-parametric unstable minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$, Math. Japonica 30 (1985), 49-56.

[Kaw-4] S. Kawai; A remark on the stability of Yang-Mills connections, Kodai Math. J. 9 (1986), 117-122.

[Ke-1] K. Kenmotsu; On compact minimal surfaces with nonnegative Gaussian curvature in a space of constant curvture I, II, Tohoku Math. J. 25 (1973), 469-479 ; 27 (1975), 291-301.

[Ke-2] K. Kenmotsu; On minimal immersions of $\mathbb{R}^2$ into S^N, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 182-191.

[Ke-3] K. Kenmotsu; On minimal immersions of $\mathbb{R}^2$ into $P^n(\mathbb{C})$, J. Math. Soc. Japan 37 (1985), 665-682.

[Kob-O-T] S. Kobayashi, Y. Ohnita and M. Takeuchi; On instability of Yang-Mills connections, Math. Z. 193 (1986), 165-189.

[Kos-M] J. L. Koszul and B. Marlgrange; Sur certaines structures fibrées complexes, Arch. Math. 9 (1958), 102-109.

[La-1] H. B. Lawson, Jr.; Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math. 92 (1970), 335-374.

[La-2] H. B. Lawson, Jr. ; "Lecture on Minimal Submanifolds," Math. Lecture Series, No.9. Publish or Perish, Berkeley, California, 1980.

[La-3] H. B. Lawson, Jr.; Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose, Séminaire Bourbaki, 36 e année, 1983/1984, n 624.

[La-Si] H. B. Lawson, Jr. and J. Simons; On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry, Ann. of Math. 98 (1973), 427-450.

[Lem] L. Lemaire; Applications harmoniques de surfaces riemanniennes, J. Diffrential. Geom. 13 (1978), 51-78.

[Leu-1] P.-F. Leung; On the stability of harmonic maps, Lecture Notes in Mathematics 949, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982, 122-129.

[Leu-2] P.-F. Leung; Minimal submanifolds in a sphere, Math. Z. 183 (1983), 75-86.

[Leu-3] P.-F. Leung; A note on stable harmonic maps, J. London Math. Soc. (2) 29 (1984),380-384.

[Li] A. Lichnerowicz; Applications harmoniques et variétés kählériennes, in "Symp. Math. III," pp.341-402, Bologna 1970.

[M-Y-1] W. H. Meeks III and S. T. Yau; Topology of three dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory, Ann. of Math. 111 (1980), 441-485.

[M-Y-2] W. H. Meeks III and S. T. Yau; The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds, Topology 21 (1982), 409-442.

[M-Y-3] W. H. Meeks III and S. T. Yau; Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature, Ann. of Math. 116 (1982), 621-659.

[Me] D. Meyer; Sur les variétés riemanniennes á opérateurs de courbure positif, C. R. Acad. Sc., Paris, Ser. A 272 (1971), 482-485.

[Mi-2] M. J. Micallef; Stable minimal surfaces in Euclidean space, J. Diff. Geom. 19 (1984), 57-84.

[Mi-2] M. J. Micallef; Stable minimal surfaces in flat tori, in "Complex differential geometry and nonlinear differential equations", Contemporary Mathematics 49 (1986), 73-78.

[Mi-Mo] M. J. Micallef and J. D. Moore; Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes, a preprint.

[Mok] N. Mok; The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature, a preprint.

[Moo-1] J. D. Moore; On stability of minimal spheres and a two-dimensional version of Synge's theorem, Arch. Math. 44 (1985), 278-281.

[Moo-2] J. D. Moore; Compact Riemannian manifokds with positive curvature operators, Bull. Amer. Math. Soc. 14 (1986), 279-282.

[Mor] H. Mori; Notes on stable currents, Pacific J. Math. 61 (1975), 235-240.

[Na] H. Nakajima; Regularity of minimizing harmonic maps into certain Riemannian manifolds, a preprint.

[Ni-Ta] T. Nitta and M. Takeuchi; Contact structures on twistor spaces, J. Math. Soc. Japan 39 (1987), 139-162.

[OB-R] N. R. O'Brian and J. H. Rawnsley; Twistor spaces, Ann. Global Anal. Geom. 3 (1985), 29-58.

[Oh-1] Y. Ohnita; The first standard minimal immersions of compact irreducible symmetric spaces, Differential Geometry of Submanifolds, Lecture Notes in Mathematics 1090 , Springer-Verlag, 1984, 37-49.

[Oh-2] Y. Ohnita; Stable minimal submanifolds in compact rank one symmetric spaces, Tohoku Math. J. 38 (1986), 199-217.

[Oh-3] Y. Ohnita; Stability of harmonic maps and standard minimal immersions, Tohoku Math. J. 38 (1986), 259-267.

[Oh-4] Y. Ohnita; Pluriharmonicity of stable harmonic maps, to appear in J. London Math. Soc.

[Oh-5] Y. Ohnita, On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces, to appear in Compositio Math.

[Oh-Ts] Y. Ohnita and H. Tasaki; Uniqueness of certain 3-dimensional homologically volume minimizing submanifolds in compact simple Lie groups, Tsukuba J. Math. 10 (1986), 11-16.

[Oh-Ud] Y. Ohnita and S. Udagawa; Stable harmonic maps from Riemann surfaces to compact Hermitian symmetric spaces, a preprint.

[Ok] T. Okayasu; Pinching and nonexistence of stable harmonic maps, a preprint.

[Pa-1] R. S. Palais; Homotopy theory of infinite dimensional manifolds, Topology 5 (1966), 1-16.

[Pa-2] R. S. Palais; Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds, Topology 5 (1966), 115-132.

[Pl] A. I. Pluzhnikov, Some properties of harmonic mappings in the case of spheres and Lie groups, Soviet Math. Dokl. 27 no. 1 (1983), 246-248.

[Ram] J. Ramanathan; Harmonic maps from S^2 to $G_{2,4}$, J. Differential Geom. 19 (1984), 207-219.

[Raw] J. H. Rawnsley; f-structures, f-twistor spaces and harmonic maps, Geometry Seminar "Luigi Bianchi" II-1984, edited by E. Vesentini, Lecture Notes in Math. 1164, Springer-Verlag, 1985, 85-159.

[Sa-U] J. Sacks and K. Uhlenbeck; The existence of minimal immersions of 2-spheres, Ann. of Math. 113 (1981), 1-24.

[Sal-1] S. M. Salamon; Quaternionic Kähler manifolds, Invent. math. 67 (1982), 143-171.

[Sal-2] S. M. Salamon; quaternionic structures and twistor spaces, Global Riemannian Geometry, edited by T. J. Willmore and N. Hitchin, Eellis Horwood, 1984, 65-74.

[Sal-3] S. M. Salamon; Minimal surfaces and symmetric spaces, Differential Geometry, L. A. Cordero (editor), Reasearch Noted in Math. 131, Pitman, 1985, 103-114.

[Sal-4] S. M. Salamom; Harmonic and holomorphic maps, Geometry Seminor "Luigi Bianchi" II-1984, edited by E. Vesentini, Lecture Notes in Math. 1164, Springer-Verlag, 1985, 161-224.

[Sc-Si-Ya] R.Schoen, L. Simon and S. T. Yau; Curvature estimates for minimal hypersurfaces, Acta Math. 134 (1975), 277-288.

[Sc-Uh-1] R. Schoen and K. Uhlenbeck; A regularity theory for harmonic maps, J. Diff. Geom. 17 (1982), 307-335. Correction to "A regularity theory for harmonic maps, J. Diff. Geom. 18 (1983), 329.

[Sc-Uh-2] R. Schoen and K. Uhlenbeck; Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps, J. Diff. geom. 18 (1983), 253-268.

[Sc-Uh-3] R. Schoen and K. Uhlenbeck; Regularity of minimizing harmonic maps into the sphere, Invent. math. 78 (1984), 89-100.

[Se] G. Segal; The topology of space of rational functions, Acta Math. 143 (1979), 39-72.

[Si-1] J. Simons; On transitivity on holonomy systems, Ann. of Math. 76 (1962), 213-234.

[Si-2] J. Simons; Minimal varieties in riemannian manifolds, Ann. of Math. 88 (1968), 62-105.

[Siu-1] Y.-T. Siu; Curvature characterization of hyperquadrics, Duke Math. J. 47 (1980), 641-654.

[Siu-2] Y.-T. Siu; The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, Ann. of Math. 112 (1980), 73-111.

[Siu-3] Y.-T. Siu; Strong rigidity of compact quotients of exceptional bounded symmetric domains, Duke Math. J. 48 (1981), 857-871.

[Siu-4] Y.-T. Siu; Complex-analyticity of harmonic maps and vanishing theorems, Several Complex Variables, Proc. the 1981 Hangzhou Conf., 1984, 73-84.

[Siu-5] Y.-T. Siu; Complex-analyticity of harmonic maps, vanishing and Lefschetz theorems, J. Diff. Geom. 17 (1982), 55-138.

[Siu-Y] Y.-T. Siu and S.-T. Yau; Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature, Invent. math. 59 (1980), 189-204.

[Tac] S. Tachibana; A theorem on Riemannian manifolds of positive curvature operator, Proc. Japan Acad. 50 (1974), 301-302.

[Tas-1] H. Tasaki; Certain minimal or homologicallly volume minimizing submanifolds in compact symmetric spaces, Tsukuba J. Math. 9 (1985), 117-131.

[Tas-2] H. Tasaki; Quaternionic submanifolds in quaternionic symmetric spaces, Tohoku Math. J. 38 (1986), 513-538.

[Tas-3] H. Tasaki; Calibrated geometries in quaternionic Grassmannians, a preprint.

[Tkk] S. Takakuwa; On removable singularities of stationary harmonic maps, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. 32 (1985), 373-395.

[Tr-1] A. J. Tromba; a general approach to Morse theory, J. Diff. Geom. 12 (1977), 47-85.

[Ty] A. V. Tyrin; Critical points of the multidimensional Dirichlet functional, Math. USSR Sbornik, 52 no.1 (1985), 141-153.

[Ud-1] S. Udagawa; Minimal immersions of Kaehler manifolds into complex space forms, to appear in Tokyo J. Math.

[Ud-2] S. Udagawa; Pluriharmonic maps and minimal immersions of Kaehler manifolds, to appear in J. London Math. Soc.

[Ud-3] S. Udagawa; Holomorphicity of certain stable harmonic maps and minimal immersions, a preprint.

[Uh-1] K. Uhlenbeck; Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model), to appear in J. Diff. Geom.

[Uh-2] K. Uhlenbeck; Morse theory on Banach manifolds, J. Funct. Anal. 10 (1972), 430-445.

[Uh-3] K. Uhlenbeck; Morse theory by perturbation methods with applications to harmonic maps, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), 569-583.

[Uh-Ya] K. Uhlenbeck and S. T. Yau; On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, Comm. Pure and Applied Math. 31 (1978), S257-S293.

[We-1] S. W. Wei; An avarage process in the calulus of variatinos and the stability of harmonic map, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 11 (1983),

[We-2] S. W. Wei; Liouville theorems for stable harmonic maps into either strongly unstable, or δ-pinched, manifolds, Proc. Symp. Pure Math. 44 (1986), [We-3] S. W. Wei; The regularity of minimizer, a preprint.

[Wh-1] B. White; Mapping that minimize area in their homotopy classes, J . Differential Geom. 20 (1984), 433-446.

[Wh-2] B. White; Homotopy classes in Sobolev spaces and energy minimizing maps, Bull. Amer. Math. Soc. 13 no. 2 (1985), 166-168.

[Wh-3] B. White; Infima of energy functionals in homotopy classes of mappings, J. Differential Geom. 23 (1986), 127-142.

[Wh-4] B. White; Homotopy classes in Sobolev spaces and the existence of energy minimizing maps, a preprint.

[Wol] J. G. Wolfson; Harmonic maps of the two-sphere into the complex hyperquadric, J. Differential Geom. 24 (1986),141-152.

[Woo-1] J. C. Wood; Lectures by J. C. Wood for the 6th Symposium on Differential Geometry and Differenrial Equations, Shanghai, 1985.

[X-1] Y. L. Xin; Some results on stable harmonic maps, Duke Math. J. 47 (1980), 609-613.

[X-2] Y. L. Xin; On stable harmonic maps and their application, Proc. of the 1980th Beijing Symp. on Diff. Geom. and Diff. Eq. III (1982), 1611-1619.

[Yan] K. Yang; Frenet formulae for holomorphic curves in the quadric, Bull. Austral. Math. Soc. 33 (1986), 195-206.

[Yan] K. Yano; On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$, Tensor 14 (1963), 99-109.

[Za] W. J. Zakrzewski; Classical solutions to $\mathbb{C}P^{n-1}$ models and their generalizations.

[Zh] J.-Q. Zhong; The degree of strongly nondegeneracy of the bisectional curvature of exceptional bounded symmetric domains, Several Complex Variables, Proc. the 1981 Hangzhou Conf., 1984, 127-139.